Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediţia a III-a,
revizuită şi adăugită

ÎNVĂȚARE DE INIȚIERE®
susținere, remediere

Editura Paralela 45

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE
Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități 5
Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ 8
Lecția 3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 14
Lecția 4. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute 19
Lecția 5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute 27
Teste de evaluare sumativă 32
Fișă pentru portofoliul elevului 34
Probleme din realitatea cotidiană 36

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR
Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide 38
Lecția 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale 42
Lecția 8. Distanța dintre două puncte în plan 47
Lecția 9. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice 51
Lecția 10. Elemente de statistică matematică. Poligonul frecvențelor 56
Teste de evaluare sumativă 61
Fișă pentru portofoliul elevului 63
Probleme din realitatea cotidiană 65

GEOMETRIE

CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR
Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante 67
Lecția 2. Teorema lui Thales 70
Lecția 3. Reciproca teoremei lui Thales 76
Teste de evaluare sumativă 80
Lecția 4. Triunghiuri asemenea 82
Lecția 5. Teorema fundamentală a asemănării 85
Lecția 6. Criterii de asemănare a triunghiurilor 90
Teste de evaluare sumativă 96
Fișă pentru portofoliul elevului 98
Probleme din realitatea cotidiană 99

Capitolul IV. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă 103
Lecția 8. Teorema înălțimii 106
Lecția 9. Teorema catetei 110
Lecția 10. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora 114
Teste de evaluare sumativă 121
Lecția 11. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic 122
Lecția 12. Rezolvarea triunghiului dreptunghic 129
Lecția 13. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat 136
Teste de evaluare sumativă 141
Fișă pentru portofoliul elevului 143
Probleme din realitatea cotidiană 145

Modele de teste pentru Evaluarea Națională 148

Modele de teze pentru semestrul al II-lea 153

Teste de evaluare finală 155

Indicații și răspunsuri 158

ALGEBRĂ

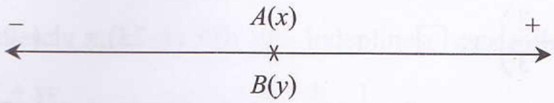
Capitolul II

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Citesc și rețin

Numerele reale x și y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x, respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulțimea numerelor reale, relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci și $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalității același termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z; \; x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z; \; x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru două egalități, se obține tot o egalitate.

Dacă $x = y$ și $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ și $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Cum se aplică?

1. Știind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătați că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluție:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$$

2. Se consideră numerele reale a, b, c şi d, care îndeplinesc condiţiile $4a = 3b$ şi $25c = 10d$. Arătaţi că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluție:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$.
Din $12a = 9b$ şi $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x + 3 = y + 3$; ☐ b) $x - 8 = y - 8$; ☐

c) $x - 1,(3) = y - 1,(3)$; ☐ d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$. ☐

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; ☐ b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$; ☐

c) $x \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}\right) \cdot y$; ☐ d) $x : (-23) = y : (-23)$. ☐

3. Dacă x şi y sunt două numere reale care îndeplinesc condiţia $24x = 36y$, arătaţi că:

a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)

4. Dacă x şi y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătaţi că:

a) $x \cdot \dfrac{1}{2} + 53 = y \cdot \dfrac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

b)

5. Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $2z = 5t$. Arătaţi că:

a) $20z = 50t$; b) $\dfrac{z}{5} = \dfrac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

b)

Exerciții și probleme de dificultate medie

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătați că:

a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c și d sunt numere reale care îndeplinesc condițiile $10a = 15b$ și $35c = 28d$, arătați că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $\sqrt{3}a^3 = \sqrt{6}b$ și $2\sqrt{3}a = \sqrt{6}b^3$. Arătați că $|a| = |b|$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

9. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condițiile $a + b + c = 1$ și $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătați că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

10. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $x \cdot y \cdot z = 1$ și $\frac{x^2+yz}{1+x^3} + \frac{y^2+zx}{1+y^3} + \frac{z^2+xy}{1+z^3} = 0$. Arătați că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătați că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) **2.** Se consideră numerele reale z și t, care îndeplinesc condiția $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătați că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) **3.** Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $4a = 5b$ și $14c = 10d$. Arătați că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Citesc și rețin

O ecuație de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $x \in \mathbb{R}$ (1), se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației** (1), dacă

$au + b = 0$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația (1) înseamnă a determina **mulțimea de soluții**

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b = 0\}.$$

Definiție: Două ecuații de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente**, dacă au aceeași mulțime de soluții.

Pentru a rezolva ecuația (1) putem folosi proprietățile relației de egalitate pe $\mathbb{R}$.

Cum se aplică?

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $-20x = -35$; b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6}$.

Soluție:

a) $-20x = -35 \Leftrightarrow x = \dfrac{-35}{-20} \Leftrightarrow x = +\dfrac{35^{(5}}{20} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x = 1\dfrac{3}{4}$;

b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{-6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2$; b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Soluție:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 2 - 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{6^{(3}}{9}x = \dfrac{5^{(5}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} : \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$;

b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = (8\sqrt{6}) : (2\sqrt{2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$.

3. Rezolvați ecuația $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2(7x+5)}{15}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

$$\frac{^{6)}3x}{5} - \frac{^{15)}1}{2} = \frac{^{2)}2(7x+5)}{15} \Leftrightarrow 18x - 15 = 4(7x + 5) \Leftrightarrow 18x - 15 = 28x + 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18x - 28x = 20 + 15 \Leftrightarrow -10x = 35 \Leftrightarrow x = \frac{35^{(5}}{-10} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}.$$

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Verificați dacă numărul real 4 este soluție pentru fiecare dintre următoarele ecuații, apoi completați caseta cu răspunsul corespunzător „Da" sau „Nu":

a) $x + 37 = 41$; ☐ b) $3x - 2 = 10$; ☐ c) $x : (-2) = 2$. ☐

b)

c)

2. Verificați dacă numărul real $\frac{1}{2}$ este soluție pentru fiecare dintre următoarele ecuații, apoi completați caseta cu răspunsul corespunzător „Da" sau „Nu":

a) $x + \frac{3}{2} = 2$; ☐ b) $1{,}5 - x = 1$; ☐ c) $2\frac{1}{2} + x = 2$. ☐

b)

c)

3. Verificați dacă numărul real $\sqrt{3}$ este soluție pentru fiecare dintre următoarele ecuații, apoi completați caseta cu răspunsul corespunzător „Da" sau „Nu":

a) $\sqrt{3}\,x + 2 = 0$; ☐ b) $x : \sqrt{3} + 3 = 4$; ☐ c) $\sqrt{6}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. ☐

a)

b)

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $8x = 4$; b) $6x = 9$; c) $4x = 6$; d) $6x = 2$;
e) $-10x = 15$; f) $18x = -12$; g) $-14x = -8$; h) $-15x = -9$.

c)

h)

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x + 7 = 11$; b) $x - 8 = 10$; c) $x + 4 = 17$; d) $x - 5 = 14$;
e) $15 + x = 8$; f) $x - 2 = -7$; g) $x + 31 = 9$; h) $x - 6 = -5$.

GEOMETRIE

Capitolul III

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

Citesc și rețin

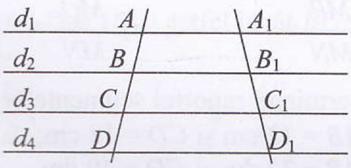
Definiție: Raportul a două segmente este **raportul lungimilor** lor exprimate în aceleași unități de măsură.

Definiție: Segmentele $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, …, $[A_nB_n]$ și $[E_1F_1]$, $[E_2F_2]$, …, $[E_nF_n]$ se numesc **proporționale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleași unități de măsură, formează șirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1}=\frac{A_2B_2}{E_2F_2}=\ldots=\frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.

$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$, $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \Rightarrow$
$\Rightarrow [A_1B_1] \equiv [B_1C_1] \equiv [C_1D_1]$.



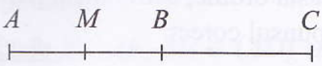
Cum se aplică?

1. Determinați raportul segmentelor $[AB]$ și $[EF]$ cu lungimile de 4 cm, respectiv 140 mm.

Soluție:

Exprimăm lungimea segmentului $[EF]$ în centimetri: $EF = 140$ mm $= 140 : 10$ cm $=$ $= 14$ cm, deci $\frac{AB}{EF}=\frac{4\text{ cm}}{14\text{ cm}}=\frac{2}{7}$.

2. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B și C, în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv$ $\equiv [BC]$ și notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$. Arătați că segmentele $[AM]$, $[MB]$, $[AB]$ și $[BC]$ sunt proporționale.



Soluție:

Notăm $AB = 2x$, deci $BC = 2x$, $AM = x$ și $MB = x$;

$\frac{AM}{AB}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ și $\frac{MB}{BC}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$, prin urmare $\frac{AM}{AB}=\frac{MB}{BC}$.

3. Se consideră segmentul $[EF]$ și punctul $D \in (EF)$, astfel încât $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$. Aflați rapoartele: $\frac{DF}{DE}$, $\frac{DE}{EF}$ și $\frac{EF}{DF}$.

Soluție:

Deoarece $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, rezultă că $\frac{DF}{DE} = \frac{5}{3}$. În continuare aplicăm proprietățile proporțiilor derivate cu alți termeni: $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE}{DE+DF} = \frac{3}{3+5}$, așadar $\frac{DE}{EF} = \frac{3}{8}$; $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE+DF}{DF} = \frac{3+5}{5}$, așadar $\frac{EF}{DF} = \frac{8}{5}$.

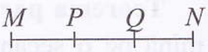
Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat segmentul $[EF]$ și punctul M, mijlocul acestuia. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\frac{EM}{EF} = \frac{1}{2}$; ☐ b) $\frac{EM}{MF} = 1$; ☐ c) $\frac{EF}{EM} = 2$; ☐ d) $\frac{FM}{FE} = \frac{1}{3}$. ☐

2. În figura alăturată este reprezentat segmentul $[MN]$ și punctele P și Q interioare acestuia, astfel încât $[MP] \equiv [PQ] \equiv [QN]$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.



a) $\frac{MP}{MN} =$ ....; b) $\frac{MQ}{MN} =$ ....; c) $\frac{MQ}{PN} =$ ....; d) $\frac{NQ}{NP} =$ ....

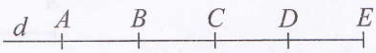
3. Determinați raportul segmentelor $[AB]$ și $[CD]$ în următoarele cazuri:

a) $AB = 12$ cm și $CD = 18$ cm; b) $AB = 36$ dm și $CD = 24$ dm;
c) $AB = 32$ dm și $CD = 40$ dm; d) $AB = 63$ cm și $CD = 72$ cm.

c)

d)

4. În figura alăturată, pe dreapta d au fost construite punctele A, B, C, D și E în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.



a) $\frac{AB}{BE} =$ ....; b) $\frac{AC}{BE} =$ ....; c) $\frac{EA}{EB} =$ ....; d) $\frac{DE}{DA} =$ ....

5. Determinaţi raportul segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ în următoarele cazuri:

a) $AB = 15$ m şi $CD = 2{,}4$ dam; b) $AB = 28$ m şi $CD = 0{,}08$ hm;

c) $AB = 6$ dam şi $CD = 450$ dm; d) $AB = 72$ dm şi $CD = 450$ cm.

c)

6. Arătaţi că segmentele $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ şi $[MN]$ sunt proporţionale, ştiind că:

a) $AB = 12$ cm, $CD = 9$ cm, $EF = 28$ cm şi $MN = 21$ cm;

b) $AB = 8$ cm, $CD = 25$ cm, $EF = 20$ cm şi $MN = 10$ cm.

b)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

7. Dacă notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$ şi cu P mijlocul segmentului $[AM]$, aflaţi rapoartele:

a) $\dfrac{AM}{AB}$; b) $\dfrac{AP}{AB}$; c) $\dfrac{PB}{AM}$; d) $\dfrac{AB}{PB}$.

8. Dacă C este mijlocul segmentului $[AB]$ şi punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3BD$, aflaţi:

a) $\dfrac{BD}{BC}$; b) $\dfrac{DC}{DA}$; c) $\dfrac{CD}{AB}$; d) $\dfrac{AB}{AD}$.

9. Fie M un punct interior segmentului $[AB]$. Dacă:

a) $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{4}{5}$, aflaţi $\dfrac{MB}{MA}, \dfrac{MA}{AB}, \dfrac{AB}{MB}$; b) $\dfrac{MA}{AB} = \dfrac{2}{7}$, aflaţi $\dfrac{AB}{AM}, \dfrac{MB}{MA}, \dfrac{MB}{AB}$.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele $E_1, E_2 \in (AB)$, astfel încât $[AE_1] \equiv [E_1E_2] \equiv [E_2B]$. Paralelele la dreapta BC, construite prin punctele E_1 şi E_2, intersectează latura $[AC]$ în punctele F_1, respectiv F_2. Ştiind că $AF_1 = 7{,}5$ cm, calculaţi $\mathcal{P}_{ABC}$.

11. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B, C şi D, în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD]$ şi notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$. Arătaţi că:

a) segmentele $[AB]$, $[MB]$, $[AD]$ şi $[MC]$ sunt proporţionale;

b) segmentele $[DB]$, $[DA]$, $[BC]$ şi $[MC]$ sunt proporţionale.

12. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, şi punctele $M_1, M_2, M_3 \in (AD)$ astfel încât $[AM_1] \equiv [M_1M_2] \equiv [M_2M_3] \equiv [M_3D]$. Paralelele la dreapta AB, construite prin punctele M_1, M_2 şi M_3, intersectează latura $[BC]$ în punctele N_1, N_2, respectiv N_3. Dacă $AD = 16$ cm şi $BC = 20$ cm, calculaţi lungimile segmentelor:

a) $[AM_1]$, $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ şi $[M_3D]$; b) $[BN_1]$, $[N_1N_2]$, $[N_2N_3]$ şi $[N_3C]$.

13. Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D și E în această ordine, astfel încât $BC = 2AB$, $[BC] \equiv [CD]$ și $[DE] \equiv [AB]$. Arătați că:

a) segmentele $[AB]$, $[AC]$, $[CE]$ și $[DE]$ sunt proporționale;

b) segmentele $[AC]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[CE]$ sunt proporționale.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

14. Fie D și E două puncte interioare segmentului $[AB]$. Dacă $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB}$, arătați că punctele D și E sunt identice.

15. În triunghiul ABC, notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$ și construim $ME \perp AB$, $E \in AB$ și $MF \perp AC$, $F \in AC$. Arătați că segmentele $[AB]$, $[AC]$, $[ME]$ și $[MF]$ sunt proporționale.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră segmentul $[EF]$ și punctul $D \in (EF)$, astfel încât $ED = 2DF$. Determinați rapoartele:

a) $\frac{ED}{EF}$; b) $\frac{FD}{FE}$; c) $\frac{FD}{DE}$.

(3p) **2.** Arătați că segmentele $[AB]$, $[CD]$, $[MN]$ și $[PQ]$ sunt proporționale, știind că $AB = 18$ cm, $CD = 35$ cm, $MN = 45$ cm și $PQ = 14$ cm.

(3p) **3.** Se consideră segmentul $[MN]$ și punctul $P \in (MN)$, astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{5}{4}$.

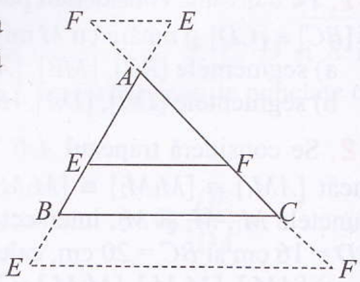
Aflați rapoartele $\frac{MP}{MN}$ și $\frac{PN}{MN}$.

Lecția 2. Teorema lui Thales

Citesc și rețin

Teorema lui Thales: O paralelă construită la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi ale triunghiului **segmente proporționale.**

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

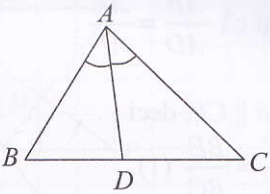


Observații:

1. Folosind proporțiile derivate cu alți termeni, din teorema lui Thales rezultă și egalitățile: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$, $\frac{EB}{AB}=\frac{FC}{AC}$ etc.

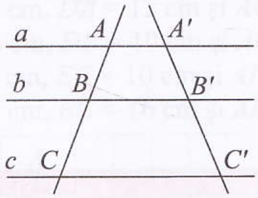
2. Dacă segmentul $[EF]$ este situat în exteriorul triunghiului ABC, concluzia teoremei lui Thales rămâne adevărată.

Teorema bisectoarei interioare: Bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu celelalte două laturi ale triunghiului.



$$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

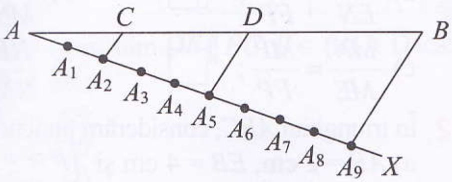
Teorema paralelelor neechidistante: Trei sau mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale.



$$a \parallel b \parallel c \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date

Pentru a împărți segmentul $[AB]$ în părți proporționale cu numerele 2, 3 și 4 procedăm astfel: construim semidreapta $[AX$ și pe aceasta, cu ajutorul compasului, construim 9 segmente congruente ($2 + 3 + 4 = 9$) de lungime u pe care le notăm $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_8A_9]$. Unim punctele B și A_9 și apoi construim $A_2C \parallel A_9B$ și $A_5D \parallel A_9B$. Aplicând teorema paralelelor neechidistante rezultă că $\frac{AC}{2}=\frac{CD}{3}=\frac{DB}{4}$.



Cum se aplică?

1. În triunghiul ABC considerăm punctul $E \in (AB)$ și construim $EF \parallel BC$, $F \in (AC)$. Dacă $AE = 2$ cm, $EB = 8$ cm și $AF = 3$ cm, aflați FC.

Soluție:

Aplicăm teorema lui Thales: $EF \parallel BC$, deci $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ sau $\frac{2\text{ cm}}{8\text{ cm}}=\frac{3\text{ cm}}{FC}$, așadar $\frac{1}{4}=\frac{3\text{ cm}}{FC}$, de unde rezultă că $FC = 4 \cdot 3$ cm, deci $FC = 12$ cm.